12η Άσκηση Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

2022-2023

Ανισώσεις 1ου Βαθμού

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=|x+1+\lambda|$ και $\beta=\lambda-2x+|\lambda x|$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Έστω η εξίσωση $x^2+2x-\lambda=0$, η οποία έχει ομόσημες ρίζες.

i) Να βρείτε την ακέραια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Για την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε τις ανισώσεις $\beta>0$ και $\dfrac{\alpha-\beta}{x^2}+\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{2}{5x^2}$.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $\alpha>0$, **ii)** $\alpha\leq 1$, **iii)** $\alpha\geq 1$.

γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $\beta\leq -2x$, **ii)** $\beta\leq 0$.

δ) Αν η ανίσωση $|x-x_0|<\rho$ με $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$, έχει λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-1,5)$, τότε να βρείτε τα x_0,ρ και την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $\alpha\leq 3$.

ε) Για $\lambda=1$ να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $\beta\leq -|x|\left(\sqrt{x^2}+1\right)-2x$, **ii)** $\beta+x^2\leq 1-|x|-2x$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) i) Αφού η εξίσωση $x^2+2x-\lambda=0$ έχει ομόσημες ρίζες τότε $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 4+4\lambda\ge 0\Leftrightarrow 4\lambda\ge -4\Leftrightarrow \lambda\ge -1$ και $P>0\Leftrightarrow -\lambda>0\Leftrightarrow \lambda<0$ άρα είναι $\lambda\in[-1,0)$ άρα η ακέραια τιμή του λ είναι $\lambda=-1$.

ii) Για $\lambda=-1$ είναι $\alpha=|x+1-1|=|x|$ και $\beta=-1-2x+|-x|=|x|-2x-1$

Είναι $\beta>0\Leftrightarrow |x|-2x-1>0\Leftrightarrow |x|>2x+1$ (1)

Αν $x<0$ τότε $(1)\Leftrightarrow -x>2x+1\Leftrightarrow 3x<-1\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$

Αν $x>0$ τότε $(1)\Leftrightarrow x>2x+1\Leftrightarrow x<-1$ αδύνατη αφού $x>0$.

$$\frac{\alpha-\beta}{x^2}+\frac{1}{x}\ge\frac{2}{5x^2}\Leftrightarrow\frac{\cancel{|x|}-\cancel{|x|}+2x+1}{x^2}+\frac{1}{x}\ge\frac{2}{5x^2}\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x^2}+\frac{1}{x}\ge\frac{2}{5x^2}\quad(2)$$

Για να ορίζεται η (2) πρέπει $\begin{cases}x^2\ne 0\\ x\ne 0\\ 5x^2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ne 0$.

Είναι $(2)\Leftrightarrow 2x+1+x\ge\frac{2}{5}\Leftrightarrow 3x\ge\frac{2}{5}-1\Leftrightarrow 3x\ge-\frac{3}{5}\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{5}$ και $x\ne 0$ άρα $x\in\left[-\frac{1}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

β) i) $\alpha>0\Leftrightarrow |x+1+\lambda|>0\Leftrightarrow x+1+\lambda\ne 0\Leftrightarrow x\ne -1-\lambda$.

ii) $\alpha\le 1\Leftrightarrow |x+1+\lambda|\le 1\Leftrightarrow -1\le x+1+\lambda\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x+1+\lambda\\ x+1+\lambda\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2-\lambda\\ x\le -\lambda\end{cases}$ (3)

Είναι $-2-\lambda<-\lambda\Leftrightarrow -2<0$ άρα $(1)\Leftrightarrow -2-\lambda\le x\le -\lambda\Leftrightarrow x\in[-2-\lambda\,,-\lambda]$.

iii) $\alpha\ge 1\Leftrightarrow |x+1+\lambda|\ge 1\Leftrightarrow (x+1+\lambda\le -1\Leftrightarrow x\le -2-\lambda)$ ή $(x+1+\lambda\ge 1\Leftrightarrow x\ge -\lambda)$ (4)

Είναι $-2-\lambda<-\lambda\Leftrightarrow -2<0$ άρα $(4)\Leftrightarrow -2-\lambda\le x\le -\lambda\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2-\lambda]\cup[-\lambda,+\infty)$.

γ) i) $\beta\le -2x\Leftrightarrow \lambda-\cancel{2x}+|\lambda x|\le -\cancel{2x}\Leftrightarrow \lambda-|\lambda x|\le 0\Leftrightarrow |\lambda x|\ge\lambda\Leftrightarrow|\lambda||x|\ge\lambda$ (5)

Αν $\lambda<0$ τότε $(5)\Leftrightarrow -\lambda|x|\ge\lambda\Leftrightarrow -|x|\le 1\Leftrightarrow |x|\ge -1$ το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=0$ τότε $(5)\Leftrightarrow 0|x|\ge 0\Leftrightarrow 0\ge 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ως ισότητα.

Αν $\lambda>0$ τότε $(5)\Leftrightarrow \lambda|x|\ge\lambda\Leftrightarrow |x|\ge 1\Leftrightarrow x\le -1$ ή $x\ge 1$.

ii) $\beta\le 0\Leftrightarrow \lambda-2x+|\lambda x|\le 0\Leftrightarrow |\lambda x|\le 2x-\lambda$ (6)

- Αν $2x-\lambda<0\Leftrightarrow 2x<\lambda\Leftrightarrow x<\frac{\lambda}{2}$ τότε η (6) είναι αδύνατη αφού $|\lambda x|\ge 0$.
- Αν $2x-\lambda\ge 0\Leftrightarrow 2x\ge\lambda\Leftrightarrow x\ge\frac{\lambda}{2}$ τότε: $(6)\Leftrightarrow |\lambda x|\le 2x-\lambda\Leftrightarrow -2x+\lambda\le\lambda x\le 2x-\lambda\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+\lambda\le\lambda x\\ \lambda x\le 2x-\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\lambda x\ge\lambda\\ 2x+\lambda x\ge\lambda\end{cases}\Leftrightarrow 2x+\lambda x\ge\lambda\Leftrightarrow(2+\lambda)x\ge\lambda$

  - Αν $2+\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-2$ τότε $(6)\Leftrightarrow x\le\frac{\lambda}{2+\lambda}$ και $x\ge\frac{\lambda}{2}$.

Έστω ότι $\frac{\lambda}{2}<\frac{\lambda}{2+\lambda} \overset{2+\lambda<0}{\Leftrightarrow} \cancel{2}(2+\lambda)\frac{\lambda}{\cancel{2}}>2\cancel{(2+\lambda)}\frac{\lambda}{\cancel{2+\lambda}} \Leftrightarrow \cancel{2\lambda}+\lambda^2>\cancel{2\lambda} \Leftrightarrow \lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ που ισχύει αφού $\lambda<-2$ άρα είναι $(6) \Leftrightarrow x\in\left[\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2+\lambda}\right]$.

- Αν $2+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$ τότε $(6) \Leftrightarrow 0x\geq -2 \Leftrightarrow 0\geq -2$ αδύνατη.
- Αν $2+\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda>-2$ τότε $(6) \Leftrightarrow x\geq\frac{\lambda}{2+\lambda}$ και $x\geq\frac{\lambda}{2}$.

  Είναι $\frac{\lambda}{2}>\frac{\lambda}{2+\lambda} \overset{2+\lambda>0}{\Leftrightarrow} \cancel{2}(2+\lambda)\frac{\lambda}{\cancel{2}}>2\cancel{(2+\lambda)}\frac{\lambda}{\cancel{2+\lambda}} \Leftrightarrow \cancel{2\lambda}+\lambda^2>\cancel{2\lambda} \Leftrightarrow \lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda>-2$. Άρα αν $\lambda\in(-2,0)\cup(0,+\infty)$ τότε $(6) \Leftrightarrow x\geq\frac{\lambda}{2}$ και αν $\lambda=0$ τότε $(6) \Leftrightarrow x\geq 0$.

δ) Είναι $x\in(-1,5) \Leftrightarrow -1<x<5$. Αρχικά θα βρούμε τους αριθμούς $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$.

1ος τρόπος: $x\in(-1,5) \Leftrightarrow -1<x<5 \Leftrightarrow -1-x_0<x-x_0<5-x_0$ (7)

Είναι $|x-x_0|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x-x_0<\rho$, δηλαδή $-1-x_0=-(5-x_0) \Leftrightarrow -1-x_0=-5+x_0 \Leftrightarrow 2x_0=4 \Leftrightarrow x_0=2$

Τότε $(7) \Leftrightarrow -1-2<x-2<5-2 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow |x-2|<3$, άρα $\rho=3$.

2ος τρόπος: Η ανίσωση $|x-x_0|<\rho$ δηλώνει ότι η απόσταση του x από το x_0 είναι μικρότερη από ρ. Δηλαδή το x είναι οποιασδήποτε αριθμός ενός διαστήματος με κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.

Το κέντρο του $(-1,5)$ είναι το $\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$ άρα $x_0=2$ και η ακτίνα είναι $\frac{5-(-1)}{2}=\frac{6}{2}=3$ άρα $\rho=3$.

Έχουμε την ανίσωση $\alpha\leq 3 \Leftrightarrow |x+1+\lambda|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x+1+\lambda\leq 3 \Leftrightarrow -4-\lambda\leq x\leq 2-\lambda$ (8)

Για να είναι ισοδύναμη η (8) με την (7) πρέπει $-4-\lambda=-1 \Leftrightarrow \lambda=-3$ και $2-\lambda=5 \Leftrightarrow \lambda=-3$.

ε) i) Για $\lambda=1$ είναι $\beta\leq -|x|\left(\sqrt{x^2}+1\right)-2x \Leftrightarrow 1-\cancel{2x}+|x|\leq -|x|\left(\sqrt{x^2}+1\right)-\cancel{2x}$ (9)

Για να ορίζεται η ανίσωση (9) πρέπει $x^2\geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $(9) \Leftrightarrow 1+|x|\leq -|x|(|x|+1) \Leftrightarrow 1+|x|\leq -|x|^2-|x| \Leftrightarrow |x|^2+2|x|+1\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|x|+1)^2\leq 0 \Leftrightarrow (|x|+1)^2=0 \Leftrightarrow |x|+1=0 \Leftrightarrow |x|=-1$ αδύνατη.

ii) Για $\lambda=1$: $\beta+x^2\leq 1-|x|-2x \Leftrightarrow \cancel{1}-\cancel{2x}+|x|+x^2\leq \cancel{1}-|x|-\cancel{2x} \Leftrightarrow 2|x|+x^2\leq 0$ (10)

1ος τρόπος: Επειδή $2|x|\geq 0$ και $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $(10) \Leftrightarrow 2|x|+x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2|x|=0\\ x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0$

2ος τρόπος: $(10) \Leftrightarrow 2|x|+|x|^2\leq 0 \Leftrightarrow |x|(2+|x|)\leq 0 \overset{2+|x|>0}{\Leftrightarrow} |x|\leq 0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$.